

Title	Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable functional equation. (III)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 139 p.125-p.131
Issue Date	1937-09-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74541
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

616. Hilbert 空間 = 於ケル *Linear translatable functional equation*. (III)

北 川 敏 男 (阪大)

[概要] (II) 即チ I 部 = 於テハ, (I) 即チ緒言 = 述ベタ問題 = 對スル特殊化ヲ施シ, 遂ニ特殊化ヨリ = 於テハ, 求メル解 = 對シテ、定理デ主張スルヤリヲ展開ノ對應スルコトヲ示シタ。残ルトコロハ, 解ノ *Almost Periodicity* ノ証明ノミデアルガ, コノタメニ、*Cauchy* 級数ノ理論ヲ利用スル。コレヲ (III) 即チII部 = 於テ述ベヨウト思フ。

吾々ノ當面ノ目的ニハ, L_M^2 空間デノ値ヲトル函数ヲ *Cauchy* 級数ヲ調べレバ充分デアルケレドモ, シカシ、他ニ應用ノ機會ガアルカモ知レナイカラ、*Banach* 空間ノ値ヲトル函数ノ *Cauchy* 級数ヲ述べヨウ。積分トシテ *Bochner* ノ積分ヲ用キルコトニヨリ、*numerically valued* ナ函数ノ *Cauchy* 級数論ガソノマニ拡張サレルコトヲ述べタイ。*Bochner* ガ示シタ *Banach* 空間値函数ノ *Fourier* 級数ハ以下ノ議論ノ特殊ノ場合デアル。値域ガ *Banach* 空間デアルヤリヲ函数ニツイテハ, *Birkhoff* ノ積分モ知レテキル。シカシ, コレヲ用キテハ, 以下ノ議論ハ進行シ難イ。

II. *Banach* 空間値函数ノ *Cauchy* 級数

1. 函数 $f(t)$ ハ全實軸 $-\infty < t < \infty$ デ定義サレテ

Banach 空間 (B) ノ値ヲトルモノトスル。カ、ル函数ノ
 ウチデ、任意ノ有限区間ニ於テ Bochner ノ意味ヲ可積分
 デアルヤウナモノノ全体ヲ (F) デ表ス。(Bochner ノ積分
 ニ関シテハ Fund. Math 20. 参照)。Additive Opera-
 tion Λ ハ (F) ノ任意ノ元ニ對シテ定義セラル、ソノ
 contradomain ハ (F) ニ属スルトシ、更ニ次ノ條件ヲ充
 スモノトスル。

I. Λ ハ translation ト可換デアル; 即チ $T_a f(x)$
 $\equiv f(x+a)$ トオクトキ任意ノ實數 a ニ對シテ $T_a \Lambda f(x) =$
 $\Lambda T_a f(x)$.

II. Λ ハ定積分ト可換デアル; 即チ E ヲ實軸上ノ任意ノ
 有界可測集合トシ、積分ヲ Bochner ノ意味ニトルトキ、

$$\int_E \Lambda f(x+t) dt = \Lambda \int_E f(x+t) dt$$

III. Λ = 對シテ常數 a, b ガ定マリ、 $\Lambda f(x)$ ハ
 $x+a \leq t \leq x+b$ ニ於ケル $f(t)$ ノ値ニ依存シテ定マ
ル。 コレニ $a < 0 < b$ デ、 a, b ハ $t = x$ テ f ニモ關係シナ
 イ。

IV. Λ ハ連続函数ノ一様収斂系列ニ對シテ連続デアル;
 即チ $f_n(t)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 並ビニ $f(t)$ ガ (F) ニ属シ、
 $f_n(t)$ ガ $[x+a, x+b]$ ニ連続デ、 $g_n(t) = \|f(t) - f_n(t)\|$,
 $\max_{x+a \leq t \leq x+b} g_n(t) = \rho_n(x)$ トオクトキ、 $n \rightarrow \infty$ ノトキ $\rho_n(x) \rightarrow 0$

ナラバ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda f_n(x) = \Lambda f(x)$$

コノ様ナ Λ ヲバ, $(F) =$ 於ケル *Linear translatable operation* トイフ。タトヘバ, $\varphi(t)$ ヲバ $[a, b]$ デ有界変分ノ *complex-valued* ナ函数トスルトキ

$$\int_a^b f(x+t) d\varphi(t)$$

ノ如キハ, 上ノ條件ヲ悉ク満足スル。

Banach 空間ノ任意ノ元 a ト, 任意ノ複素数 λ トニ對シテ, $e^{\lambda t} \mathcal{O}$ ハ $(F) =$ 属シ、又明カニ $\Lambda e^{\lambda t} a = G(\lambda) e^{\lambda t} a$ ナル如キ函数 $G(\lambda)$ カ定マル。コレハ t ヲ \mathcal{O} ニハ無關係デアル。コレヲ母函数ト呼ブ。母函数ニ関シテ

V. $G(\lambda)$ ハ整函数デアル。

トイフ假定ヲナス。

8. 以下 $\Lambda f(t)$ ノ代リニ $\Lambda_{\xi} f(\xi)$ ナル記法ヲ用キルコトガアル。点 $t =$ 於ケル, $f(x)$ ノ Λ ニ関スル *Cauchy 級数 \mathcal{C} -section* トイフヲハ, 次ノ如キ *contour 積分* ニ依ツテ定義スル。

$$S_{\mathcal{C}}(t, t_0; f) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} \Lambda_{\xi} \left[e^{\lambda \xi} \int_{t_0}^{t_0+\xi} f(\eta) e^{-\lambda \eta} d\eta \right] d\lambda \quad (18)$$

(18) カラシタ *contour-integral* ヲ考ヘウルタメニハ, 多少ノ考察ヲ必要トスル。シカシ、コレニツイテハ, N. Wiener: *Note on a paper of N. Banach. Fund. Math. Tom IV (1923)* ヲ参照セラレタイ。

茲ニ、積分ハ悉ク Bochner ノ意味ニ於テデアル。Bochner
ノ積分ニ関シテハ、次ノ (i), (ii) ガ知ラレテキル。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad f(x) \text{ が } (\alpha, \beta) \text{ テ Bochner 可積分ナラバ,} \\ \quad \alpha < \gamma < \beta = \text{對シテ} \\ \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \\ \text{(ii)} \quad \text{部分積分法ノ成立} \end{array} \right.$$

コノ二ツノ事柄ガ、吾々が向キニ、Ordinary Cauchy
series デ與ヘタ $S_{\mathcal{C}}(x, t; f)$ ノ変形ヲソノマニ成立セ
シメル。何故ナラバ、コノ (i), (ii) ニ相當シタコトシカ用キ
ナカッタカラデアル。即チ

(α) 変形定理ノ成立。([T] Chapter I, §1 参照)
ヲ確メルコトガ出來ル。更ニ、Ordinary Cauchy series
ト同様ニシテ、

(β) 評價定理ノ成立 ([T] Chapter I, §2 参照)
ヲモ確メウル。即チ:

評價定理 $f(x) \in (F)$ ナラバ $R(\lambda) \geq 0$ トシテ

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} e^{\lambda t_0} \Delta_{\varepsilon} \left\{ e^{\lambda \xi} \int_{t_0 + \varepsilon}^{t_0 + b} e^{-\lambda \eta} f(\eta) d\eta \right\} = o(1)$$

証明: $\delta < b, -b$ ナル様ニ正数 δ ヲ選バトキ Δ ノ Addi-
tivity カラ

$$\Delta_{\varepsilon} \left\{ e^{\lambda \xi} \int_{t+\varepsilon}^{t+b} e^{-\lambda \eta} f(\eta) d\eta \right\}$$

$$= \Delta_{\xi} \left\{ e^{\lambda \xi} \int_{t+\xi}^{t+\xi+\delta_1} e^{-\lambda \eta} f(\eta) d\eta \right\} + \Delta_{\xi} \left\{ e^{\lambda \xi} \int_{t+\xi+\delta_1}^{t+b} e^{-\lambda \eta} f(\eta) d\eta \right\}$$

更 = , 條件 II = ヲツテ,

$$\Delta_{\xi} \left\{ e^{\lambda \xi} \int_{t+\xi}^{t+\xi+\delta_1} e^{-\lambda \eta} f(\eta) d\eta \right\} = \int_t^{t+\delta} \Delta_{\xi} \left\{ f(\xi + \eta) \right\} e^{-\lambda \xi} d\xi$$

Bochner 積分 = 於テハ, 積分ハ *totalstetig* = ナルカ
 テ正数 ε ヲ如何ニ與ヘテ $\delta \leq \delta(\varepsilon)$ ナル限リ $R(\lambda) \geq 0 =$
 テ、 λ = 関シテ一様 =

$$\left\| \int_t^{t+\delta} \Delta_{\xi} \left\{ f(\xi + \eta) \right\} e^{-\lambda \xi} d\xi \right\| < \varepsilon \quad (*)$$

ナラシメウル。

次 = ,

$$\begin{aligned} \left\| e^{\lambda \xi} \int_{x_0+\xi+\delta}^{x_0+b} e^{-\lambda \eta} f(\eta) d\eta \right\| &= \left\| \int_{\delta}^{b_1-\xi} f(x_0+\xi+\zeta) e^{-\lambda \zeta} d\zeta \right\| \\ &\leq \int_{\delta}^{b_1} \|f(x_0+\xi+\zeta)\| e^{-\lambda \zeta} d\zeta \\ &\leq |e^{-\lambda \delta}| \int_{\delta}^{b_1} \|f(\xi+x_0+\zeta)\| d\zeta \quad (**)$$

コレハ、 $|\lambda| > \lambda_0(\delta)$ ナラシメルトキ、又 ε ヲリモ小ナラ
 シメウル。

依ツテ評價定理ハ (*) ト (**) トカラ得ラレル。

(注意) $R(\lambda) \leq 0$ ノトキ = ハ同様 = シテ

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} e^{\lambda t_0} \Delta_{\xi} \left[e^{\lambda \xi} \int_{t_0+\xi}^{t_0+a_1} e^{-\lambda \eta} f(\eta) d\eta \right] = 0 \quad (1)$$

コレヲノニツノ事實ハ、[T] Chapter I, §3 ノ議論
ヲ、平行ニ移スコトヲ許ス。(但シ、Banach 空間値函数
ノ有界変分函数トイフノハ、コニテハ触レナイコトニスル。
以下ノ目的ニハ考ヘル必要ハナイ)

吾々ハ以下ノ目的ノタメニ、次ノ補助定理ヲ掲ゲルニト
メル。

補助定理 8.1. “ $f(x)$ ハ (F) ニ属シ、且ツ任意
ノ有限区間デ一様ニ連続トスル。今、contours ノ系列
 $\{C_r\}$ ガアツテ

$$\{C_r\} \in O(\delta, -\delta)^{(19)}$$

且ツコノ列ニ對シテ

$$G(\lambda) = C_r - O(0; a+\delta, b-\delta)^{(20)}$$

ニナツテキルトスル。 C_r ハ各々、虚軸ト、 $\pm i\rho_r$ ダケシカ
交ハラナイモノトシ、 $\{\rho_r\}$ ノ分布ニ関シテハ、 $a+\delta \leq t \leq b-\delta$
ニテ

$$\frac{1}{n} \left\{ \sum_{r=0}^{n-1} \sin \rho_r t - \sum_{r=0}^{n-1} \sin \frac{2r\pi t}{b-a-2\delta} \right\} = o(1)^{(21)}$$

($n \rightarrow \infty$) ノミタス様ニナツテキルトスル。シカルトキニハ
 $t_0 + a + \delta \leq t \leq t_0 + b - \delta$ ニテ一様ニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} S_{C_r}(t, t_0; f) = f(t)$$

ヲ得ル。”

(19) [T] Chapter I, §3 Definition III

(20) [T] Chapter I, §3 “ IV

(21) [T] Chapter II, §12 Condition 3°, (12.6) 参照

補助定理 8.2. “前ノ補助定理ノ假定ニ對シテ更ニ

$$\Delta f(t) = 0 \quad (-\infty < t < \infty)$$

ト假定スルトキニハ、結論ニ於テ、 $t_0 + a + \delta \leq t \leq t_0 + b - \delta$ ニテ一様ニ“ヲバ”實軸上ノ任意ノ有限區間ニテ一様ニ“ニオキカヘウル。”⁽²²⁾”

コレヲノ補助定理ハ *Ordinary Cauchy's series* ノ場合ト同様ナ方法ヲ証明サレル。

(22) [T] Chapter IV, II 参照 (コレニ correspond スルトイフ譯ニハナイガ証明ハ同様ニ行クカラ)